Universidade de São Paulo

Pró-Reitoria de Graduação

Curso de Ciências Moleculares

Projeto de Iniciação à Pesquisa

Ciclo Avançado

Turma 20

Semestre: 2º / Ano: 2012

Aluno: Gabriel Cozzella
Nº USP: 6768842
Email do aluno: gabrielcozzella@usp.br
Título do projeto: Simetrias dinâmicas e suas aplicações em gravitação.
Orientador: Prof. Dr. George E. A. Matsas
Email do orientador: matsas@ift.unesp.br
Unidade: Instituto de Física Teórica - UNESP

São Paulo, 22 de junho de 2012

Gabriel Cozzella — Prof. Dr. George E. A. Matsas

Introdução

Dado um sistema físico, se tivermos as equações que descrevem a dinâmica do sistema estudado, sua evolução está determinada. Porém, muitas vezes essas equações são intrincadas e uma solução analítica em termos de funções conhecidas é difícil ou mesmo impossível. Em geral, o uso de simetrias facilita a obtenção dessas soluções ou elucida propriedades do sistema considerado. O estudo das simetrias é, portanto, essencial para um melhor entendimento do comportamento e evolução do sistema.

Separamos as simetrias em dois tipos principais: simetrias discretas, como paridade e reflexão, e simetrias contínuas, como translações temporais e boosts relativísticos. Nesse trabalho, nos restringiremos apenas as simetrias contínuas.

Segundo um importante teorema na mecânica clássica (o teorema de Noether), a cada simetria contínua de um sistema corresponde uma grandeza conservada. Um exemplo é invariância de um sistema por translações temporais, espaciais e por rotações. Essas invariâncias permitem-nos antecipar que este sistema terá as quantidades conservadas usuais que chamamos de energia, momento linear e momento angular, respectivamente.

Em diversos contextos, a existência de certas simetrias permitem que procedimentos já bem desenvolvidos e bem aplicados a uma área da Física sejam aplicados a outra completamente diferente. Um exemplo disso é a derivação do espectro do átomo de hidrogênio através do chamado vetor de Runge-Lenz (RL), inicialmente descoberto no contexto da gravitação clássica. O estudo de simetrias contínuas se tornou bastante ativo no século XX através das aplicações da teoria de grupos de Lie à Física, em especial à mecânica quântica.

No entanto, algumas simetrias não são imediatamente aparentes. O próprio vetor de RL é uma quantidade conservada no problema de Kepler que decorre de uma simetria não-trivial (i.e., não associada a uma simetria do espaço-tempo). Um outro exemplo importante é a constante de Carter, útil para descrever órbitas ao redor de um buraco negro em rotação no contexto da relatividade geral. Essas simetrias não-triviais são chamadas de simetrias escondidas ou simetrias dinâmicas [1] e serão o objeto principal desse estudo, junto a suas possíveis aplicações em problemas de gravitação.

Um exemplo: O vetor de Runge-Lenz

Para ilustrar o que pretendemos, vamos mostrar como uma simetria dinâmica (associada ao vetor de RL) pode ser utilizada para analisar o problema de Kepler no contexto da gravitação clássica. Vamos considerar um sistema isolado constituído de dois corpos (de massas m_i e vetores posição $\mathbf{r_i}$, $i = 1, 2$) no qual a única interação existente é a gravitacional. Nesse caso, o potencial gravitacional que cada corpo exerce num ponto $\mathbf{x}$ qualquer do espaço é

$$\phi_i(\mathbf{x}) = -\frac{Gm_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{r_i}|} \tag{1}$$

A energia potencial gravitacional do sistema será então

$$U(r) = -\frac{Gm_1 m_2}{|\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}|}$$

.

Como as massas não variam, nota-se que $U(r)$ é somente função do módulo r do vetor $\mathbf{r} = \mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}$[1]. O problema então consiste em encontrar a órbita descrita por ambos os corpos. O primeiro passo a ser tomado é reduzir o problema em um problema equivalente de apenas um corpo. Para isso, definimos o vetor do centro de massa

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{2}$$

Na ausência de forças externas (como no nosso problema), a aceleração $\ddot{\mathbf{R}}$ é nula. Assim, conhecendo-se as posições e velocidades iniciais dos corpos, o vetor do centro de massa fica totalmente determinado. Temos que os vetores posição de cada corpo relacionam-se com o vetor do centro de massa por

$$\mathbf{r_1} = \mathbf{R} + \tfrac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{r} \tag{3}$$

$$\mathbf{r_2} = \mathbf{R} - \tfrac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{r} \tag{4}$$

A energia cinética T dos corpos pode ser escrita como a energia cinética do centro de massa mais a energia cinética dos corpos em relação ao centro de massa. Fazendo isso, chegamos é seguinte expressão para a Lagrangiana

$$\mathfrak{L} = T - U = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{G\mu(m_1 + m_2)}{r} - \frac{L^2}{2\mu r^2} \tag{5}$$

[1]Neste trabalho, utilizaremos letras em negrito para representar vetores e as letras correspondentes sem negrito para indicar o módulo deles.

onde $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ e a massa reduzida do sistema e $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ com $\mathbf{p} = \mu\dot{\mathbf{r}}$. Como as coordenadas do vetor $\mathbf{R}$ são cíclicas, essa Lagrangiana nos mostra que o centro de massa estará ou em repouso ou em movimento translacional uniforme. As equações para as componentes de $\mathbf{r}$ não dependerão então das coordenadas de $\mathbf{R}$. Isso nos leva a considerar uma Lagrangiana

$$\mathfrak{L}' = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{G\mu(m_1 + m_2)}{r} - \frac{L^2}{2\mu r^2} \tag{6}$$

que resultará nas mesmas equações de movimento para $\mathbf{r}$. Vemos então que a Lagrangiana $\mathfrak{L}'$ representa o problema de uma partícula de massa μ a uma distância r do centro de forças, que tomaremos como origem do nosso sistema de coordenadas para o problema de um corpo. Resolvendo as equações de movimento para $\mathbf{r}$, podemos facilmente encontrar as órbitas descritas pelos corpos (através das equações (3) e (4)).

A aplicação do teorema de Noether a esse sistema nos dá então duas grandezas conservadas. Da simetria de $\mathfrak{L}'$ por rotações decorre imediatamente a conservação do momento angular $\mathbf{L}$. Outra grandeza conservada será a energia, dado que $\mathfrak{L}'$ não depende explicitamente do tempo. A energia E pode ser escrita como

$$E = \frac{\mu\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} \tag{7}$$

onde $k = \mu G(m_1 + m_2)$. Conhecendo-se os valores de E e de $\mathbf{L}$, o sistema é completamente determinado com a ajuda das equações de Euler-Lagrange e o problema pode ser resolvido completamente (como pode ser visto em [3]). No entanto, esse caminho, embora direto e correto, pode ser bastante trabalhoso. Veremos como uma solução pode ser encontrada de uma maneira mais simples, explorando a existência de uma simetria não-trivial adicional. Da energia potencial $U(r)$, temos a forçaa de interação gravitacional

$$\mathbf{f}(r) = -\nabla U(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}} = -\frac{k}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \tag{8}$$

Usando a segunda lei de Newton, segue que

$$\dot{\mathbf{p}} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r} \tag{9}$$

Agora vamos considerar o produto vetorial do vetor $\dot{\mathbf{p}}$ com o vetor momento angular $\mathbf{L}$:

$$\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L} = \frac{\mu f(r)}{r}\left[\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})\right] = \frac{\mu f(r)}{r}\left[\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - r^2\dot{\mathbf{r}}\right] \tag{10}$$

Usando a identidade $\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = r\dot{r}$ e o fato que $\mathbf{L}$ é constante, podemos reescrever a expressão acima como

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{p} \times \mathbf{L}\right) = -\mu f(r) r^2 \left[\frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \frac{\dot{r}\mathbf{r}}{r^2}\right] = -\mu f(r) r^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) \tag{11}$$

Substituindo a expressão para $f(r)$, temos então

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{p} \times \mathbf{L} - \mu k \frac{\mathbf{r}}{r}\right) = 0 \tag{12}$$

A última equação demonstra que o vetor

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \mu k \frac{\mathbf{r}}{r} \tag{13}$$

é conservado no problema de Kepler. Esse é o vetor de Runge-Lenz. Ele nos permite obter de forma mais rápida e sem nenhuma integração as equações das órbitas do problema de Kepler (exemplificando claramente como as simetrias e quantidades conservadas facilitam a resolução do problema).

Para vermos como isso é feito, consideremos o ângulo θ entre o vetor $\mathbf{r}$ e o vetor $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{r} &= Ar\cos\theta \\ &= \mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \\ &= \mathbf{L} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) - \mu k r \\ &= L^2 - \mu k r \end{aligned} \tag{14}$$

Segue da primeira e da última linha acima que

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{L^2}\left(1 + \frac{A\cos\theta}{\mu k}\right) \tag{15}$$

Esta é a equação de órbita que procurávamos. Na conservação do vetor de RL e do momento angular está contida toda a informação necessária para a descrição completa da órbita:

1. O plano da órbita é dado pela direção do momento angular (o plano é normal ao momento angular).

2. A orientação da órbita é dada pela direção do vetor de RL.

3. A excentricidade da órbita é proporcional à magnitude do vetor de RL.

4. O *semi-latus rectum* (distância perpendicular ao maior semi-eixo entre um foco e a cônica) da cônica é proporcional à magnitude do momento angular.

O valor da energia, em termos destes vetores, é dado por

$$E = \frac{A^2 - \mu^2 k^2}{2\mu L^2} \tag{16}$$

A energia determinará que tipo de órbita será descrita (elíptica, circular ou hiperbólica). Como vimos, a conservação do vetor de RL não decorre diretamente de uma simetria espaço-temporal, mas é associada a uma simetria escondida.

Um outro ponto importante a se ressaltar é que a derivação feita utiliza apenas o fato da força decair com o inverso do quadrado da distância em relação a origem, o que implica que a mesma teoria pode ser aplicada em outras situações [3], como o problema do átomo de hidrogênio, que citamos na próxima seção.

Um breve comentário sobre o átomo de hidrogênio

No tratamento quântico do átomo de hidrogênio, é de importância tanto teórica quanto prática (para aplicações espectroscópicas, por ex.) obter o espectro de energia do átomo. Baseado no problema tratado anteriormente, definimos, por analogia, o operador vetorial de RL [6]

$$\hat{\mathbf{A}} \equiv \frac{\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{L}}}{2\mu} - \frac{\hat{\mathbf{L}} \times \hat{\mathbf{p}}}{2\mu} - Ze^2 \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r} \tag{17}$$

onde $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{L}}$ são os operadores posição, momento e momento angular, respectivamente, e μ é a massa reduzida do sistema. Pode-se mostrar que $[\hat{H}, \hat{A}_i] = 0$, onde $\hat{H}$ é o Hamiltoniano do sistema. Segue então a conservação do valor esperado do observável associado ao operador vetorial de RL. Disso e das relações de comutação das componentes do operador momento angular (que podem ser encontradas em [6]) temos

$$\hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{L}} = 0 \ \ \& \ \ \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{A}} = 0 \tag{18}$$

$$(\hat{A}^2 - (Ze^2)^2) = (2/\mu)\hat{H}(\hat{L}^2 + \hbar^2) \tag{19}$$

Como o operador de RL e o momento angular comutam com o Hamiltoniano, vamos considerar o subespaço de soluções com ao auto-valor E para o Hamiltoniano. Introduzindo uma modificação do operador $\hat{\mathbf{A}}$:

$$\hat{\mathbf{B}} = \left(-\frac{\mu}{2E}\right)^{1/2} \hat{\mathbf{A}} \tag{20}$$

formamos então os operadores $\frac{\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{B}}}{2}$ e $\frac{\hat{\mathbf{L}}-\hat{\mathbf{B}}}{2}$, cujos quadrados comutam com $\hat{\mathbf{L}}^2$. Como estes operadores também satisfazem as relações de comutação canônicas do momento angular, segue que

$$\left[\frac{\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{B}}}{2}\right]^2 = \hbar^2 l_1(l_1 + 1) \tag{21}$$

$$\left[\frac{\hat{\mathbf{L}} - \hat{\mathbf{B}}}{2}\right]^2 = \hbar^2 l_2(l_2 + 1) \tag{22}$$

Mas de (18), temos

$$\left[\frac{\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{B}}}{2}\right]^2 = \left[\frac{\hat{\mathbf{L}} - \hat{\mathbf{B}}}{2}\right]^2 \tag{23}$$

e, portanto, $l_1 = l_2$[2]. Com essa igualdade, obtemos das equações (18), (19) e (20)

$$\left(\frac{2E}{\mu}\right)[\hat{\mathbf{B}}^2 + \hat{\mathbf{L}}^2 + \hbar^2] = -(Ze^2)^2 \tag{24}$$

Porém temos

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{B}}^2 + \hat{\mathbf{L}}^2 + \hbar^2 &= 4\left[\frac{\hat{\mathbf{B}} \pm \hat{\mathbf{L}}}{2}\right]^2 + \hbar^2 \\ &= \hbar^2[4l(l+1)+1] \\ &= \hbar^2(2l+1)^2 \end{aligned} \tag{25}$$

portanto

$$\left(\frac{2E}{\mu}\right)[\hbar^2(2l+1)^2] = -(Ze^2)^2 \tag{26}$$

de onde segue diretamente que

$$E = -(Ze^2/\hbar)^2 \frac{\mu}{2} \frac{1}{(2l+1)^2} \tag{27}$$

Identificando $2l+1$ com n, o número quântico principal, obtemos o espectro do átomo de hidrogênio (no caso $Z = 1$), como queríamos. É interessante notar, por fim, que uma força que obedece a lei de Hooke pode possuir uma simetria oculta análoga ao vetor de RL, mas que se manifesta na forma de um tensor de segunda ordem (o chamado tensor de Fradkin-Hill) [2].

[2]Chamaremos então $l_1 = l_2 = l$.

A importância das simetrias dinâmicas em relatividade geral

Uma aplicação do conceito de simetrias dinâmicas é no entendimento da geometria do espaço-tempo de Kerr. As soluções de Kerr das equações de campo de Einstein (no vácuo) representam as únicas soluções estacionárias, axissímetricas, assintoticamente planas e com horizontes de eventos não-singulares. Elas definem a geometria do espaço-tempo de um buraco negro em rotação [4].

Essa geometria apresenta propriedades e simetrias interessantes e ainda não completamente compreendidas. Decorre imediatamente da forma resultante da m[etrica do espaço-tempo que existem campos vetoriais de Killing que representam grandezas conservadas ao longo das geodésicas percorridas pelos corpos de teste [5]. Essas grandezas são a energia e a uma das componente do momento angular.

Mas a geometria de Kerr possui uma constante do movimento adicional, chamada de constante de Carter. Ela decorre da existência de uma generalização dos campos de Killing descritos acima (um campo tensorial) que tem conexão com os desvios da geometria esférica sofridos pelo corpo em decorrência da rotação.

A existência dessa constante adicional é de importância prática: Ela permite a integração completa das equações geodésicas e permite, portanto, descrever a órbita de corpos teste nestes espaços-tempo. Com a descrição dessas órbitas, eventos que podem ser fontes de ondas gravitacionais podem ser descritos com precisão (como a queda em espiral de um corpo em direção a um buraco negro) e isso permite que sejam montados experimentos como o LISA (*Laser Interferometer Space Antenna*), um detector de ondas gravitacionais ainda em planejamento [4].

Objetivos

Durante esta iniciação científica, pretende-se fazer um estudo abrangente das simetrias dinâmicas no contexto das álgebras de Lie e com isso entender mais profundamente o comportamento dessas simetrias e como elas poderiam ser utilizadas, principalmente, para melhor compreensão de sistemas nos quais a interação dominante seja a gravitacional. Inicialmente, será estudada a teoria da relatividade geral e suas aplicações básicas. A principal referência será o livro [7]. Após esse período introdutório, o aluno começará o estudo de teoria de grupos, álgebras de Lie e simetrias dinâmicas, baseado no livro [8]. Além disso, serão cursadas as matérias de formação básica em física (descritas na grade de disciplinas, em anexo). Com isso, pretende-se dar ao aluno um sólido conhecimento dos métodos de física teórica e uma boa experiência na área.

Grade de disciplinas

Durante os dois anos do ciclo avançado as disciplinas a serem cursadas pelo aluno serão as seguintes:

Semestre	**Ano**	**Código**	**Disciplina**	**Sistema**	**CH**	**Créditos**
2º	2012	CCM 0318	Iniciação à Pesquisa I	Graduação	360	12
2º	2012	4300204	Física Matemática I	Graduação	90	6
2º	2012	4300303	Eletromagnetismo I	Graduação	90	6
2º	2012	——-	Relatividade Geral	Pós-Graduação	30	6 (12)
2º	2012					**30 (36)**
1º	2013	CCM 0328	Iniciação à Pesquisa II	Graduação	360	12
1º	2013	4300307	Física Matemática II	Graduação	60	4
1º	2013	4300304	Eletromagnetismo II	Graduação	60	4
1º	2013	4300308	Termodinâmica	Graduação	60	4
1º	2013	PGF5001	Mecânica Quântica I	Pós-Graduação	180	6 (12)
1º	2013					**30 (36)**
2º	2013	CCM 0338	Iniciação à Pesquisa III	Graduação	360	12
2º	2013	4300422	Introdução a Física de Partículas ELementares	Graduação	60	4
2º	2013	4300306	Mecânica II	Graduação	60	4
2º	2013	PGF5006	Mecânica Estatística	Pós-Graduação	180	6 (12)
2º	2013					**26 (32)**
1º	2014	CCM 0348	Iniciação à Pesquisa IV	Graduação	360	12
1º	2014	PGF5002	Mecânica Quântica II	Pós-Graduação	180	6 (12)
1º	2014	MAP0413	Equações de derivadas parciais	Graduação	60	4
1º	2014					**22 (28)**
					Total	**108**

A disciplina de Relatividade Geral do 2º semestre de 2012 será cursada no Instituto de Física Teórica - UNESP.

Referências

[1] C. E. Wulfman, World Scientific Publishing, Cingapura, 2011
Dynamical Symmetry

[2] G. E. Prince & C. J. Eliezer, J. Phys. A: Math. Gen. 14 587 (1981)
On the Lie symmetries of the classical Kepler problem

[3] H. Goldstein, C. Poole & J. Safko, Addison Wesley, 2001
Classical Mechanics

[4] C. M. Will, Phys. Rev. Lett. 102, 061101 (2009)
Carter-like constants of the motion in Newtonian gravity and electrodynamics

[5] B. Carter, Phys. Rev. 174, 1559 (1968)
Global structure of the Kerr family of gravitational fields

[6] M. Bander & C. Itzykson, Rev. Mod. Phys. 38, 330–345 (1966)
Group theory and the hydrogen atom (I)

[7] R. Wald, University Of Chicago Press, Chicago, 1984
General Relativity

[8] P. J. Olver, Springer-Verlag, Nova York, 1993
Applications of Lie Groups to Differential Equations